➢ <u>ลำดับ</u>

บทนิยาม **ลำดับ** คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

- ลำดับที่มีเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n จำนวนแรก คือ **"ลำดับจำกัด"**
- ลำดับที่มีเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก คือ **"ลำดับอนันต์"**

จากบทนิยามจะได้

f(1), f(2), f(3), …, f(n) เป็นลำดับจำกัด

f(1), f(1), f(1), ..., f(1) , … เป็นลำดับอนันต์

f(1) คือ พจน์แรกของลำดับ เขียนแทนด้วย a_1

f(2) คือ พจน์แรกของลำดับ เขียนแทนด้วย a_2

f(3) คือ พจน์แรกของลำดับ เขียนแทนด้วย a_3

f(n) คือ พจน์แรกของลำดับ เขียนแทนด้วย a_n

นั่นคือ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด

และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับอนันต์

การเขียนลำดับนอกจากจะเขียนโดยการแจงพจน์แล้วอาจจะเขียนเฉพาะพจน์ที่ n หรือ พจน์ทั่วไปพร้อมทั้งระบุสมาชิกในโดเมน

ตัวอย่างเช่น ลำดับ $a_n = 2n + 3$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots 10$

$a_n = 2^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

ในกรณีที่กำหนดลำดับโดยพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป ถ้าไม่ได้ระบุสมาชิกในโดเมน ให้ถือว่าลำดับนั้นเป็นลำดับอนันต์

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียน 4 พจน์แรก ของลำดับต่อไปนี้

1) $a_n = n$

2) $a_n = \frac{1}{n}$

3) $a_n = n + 1$

4) $a_n = 2n + 1$

5) $a_n = 2^n$

2. จงเขียนลำดับจากฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\{(x, y) \mid y = 5^x, x \in I^+\}$

2) $\{(x, y) \mid y = (\frac{2}{3})^x, x \in I^+\}$

3) $\{(x, y) \mid y = 1 + \frac{1}{x}, x \in I^+$ และ $x \leq 20\}$

➢ **<u>ลำดับเลขคณิต</u>**

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว และเรียกค่าคงตัวนี้

ว่า "ผลต่างร่วม"

กำหนด a_1 เป็นพจน์แรกของลำดับ

d เป็นผลต่างร่วม

ดังนั้น รูปทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ

$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots, a_1 + (n - 1)d$

นั่นคือ $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิต 1, 4, 7, …

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 ลำดับเลขคณิต 5, 9, 13, … , 101 มีกี่พจน์

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์แรกเท่ากับ 6 และพจน์ที่ 15 เท่ากับ -36 จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตลำดับนี้

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จำนวนเต็มระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 หารลงตัวมีกี่จำนวน

วิธีทำ

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

1) 1, 3, 5, …

2) 10, 7, 4, …

3) $3, 3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}, \ldots$

4) 17, 15.8, 14.6, …

5) a, a + b, a + 2b, …

2. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิต 1, 3, 5, …

3. จงหาพจน์ที่ 15 ของลำดับคณิต 10, 6, 2, …

4. จงหาพจน์ที่ 20 ของลำดับเลขคณิต 11, $\frac{45}{4}$, $\frac{23}{2}$, …

5. จงหาพจน์ที่ 21 ของลำดับเลขคณิต 6, 7, 5.5, 4.3, …

6. ลำดับเลขคณิต 1, 5, 9, …, 97 มีกี่พจน์

7. ลำดับเลขคณิต 20, 17, 14, …, -85 มีกี่พจน์

8. ลำดับเลขคณิต $\frac{6}{7}$, 1, $\frac{8}{7}$, …, $\frac{20}{7}$ มีกี่พจน์

9. ถ้า a, 5a – 6, 3a + 6 เป็นจำนวนจริงซึ่งเรียกกันเป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงหาค่า ฟ และ จงหาพจน์ที่ 11 ของลำดับเลขคณิตนี้

10. ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์ที่ 5 เป็น 17 และมีพจน์ที่ 10 เป็น 32 จงหาลำดับเลขคณิตลำดับนี้

11. ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์ที่ 11 เป็น -9 และมีพจน์ที่ 16 เป็น -34 จงหาลำดับเลขคณิตลำดับนี้

12. ถ้าสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตเป็น 205, 192, 179 จงหาว่า -107 เป็นพจน์ที่เท่าไรของลำดับคณิตนี้

13. จำนวนจริง 3 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตซึ่งมีผลบวกเป็น 9 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเป็น 35 จงหาจำนวนทั้งสาม

14. จำนวนจริงสี่จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตซึ่งรวมกันได้เป็น 20 และจำนวนที่มีค่ามากที่สุดมีค่ามากกว่าจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดอยู่ 6 จงหาจำนวนทั้งสี่

15.จงหาว่าลำดับของจำนวนเต็มที่มีค่าอยู่ระหว่าง 100 และ 500 ซึ่ง 9 หารลงตัวมีกี่พจน์

16. จำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 50 ถึง 150 มีกี่จำนวนที่ 2 หารลงตัว แต่ 3 หารไม่ลงตัว

17. ถ้า a, b, c เป็น 3 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต จงหา b ในเทอมของ a และ c

18. ถ้า 9, x, 25 เป็นจำนวนจริง 3 จำนวนซึ่งเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต จงหา x

<u>O-net’49</u>

ป้าจู๊เริ่มขายขนมครกในวันที่ 3 มกราคม ในวันแรกขายได้กำไร 100 บาท และในวันต่อๆไปจะขายได้กำไรเพิ่มขึ้นจากวันก่อนหน้าวันละ 10 บาททุกวัน ข้อใดต่อไปนี้เป็น<u>วันที่</u>ของเดือนมกราคมที่ป้าจู๊ขายได้กำไรเฉพาะวันนั้น 340 บาท

1. วันที่ 24
2. วันที่ 25
3. วันที่ 26
4. วันที่ 27

<u>O-net’50</u>

ถ้า a_1 , a_2 , a_3 , . . . เป็นลำดับเลขคณิตซึ่ง $a_{30} - a_{10} = 30$ แล้วผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้มีค่าเท่ากับ ข้อใดต่อไปนี้

1. 1.25
2. 1.5
3. 1.75
4. 2.0

<u>O-net’51</u>

พจน์ที่ 31 ของลำดับเลขคณิต $-\frac{1}{20},-\frac{1}{30},-\frac{1}{60},...$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{12}$
2. $\frac{13}{30}$
3. $\frac{9}{20}$
4. $\frac{7}{15}$

<u>O-net’52</u>

ลำดับเลขคณิตในข้อใดต่อไปนี้มีบางพจน์เท่ากับ 40

1. $a_n = 1 - 2n$
2. $a_n = 1 + 2n$
3. $a_n = 2 - 2n$
4. $a_n = 2 + 2n$

➢ ลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือลำดับที่เมื่อนำพจน์ขวามือตั้งแล้วหารด้วยพจน์ซ้ายมือที่อยู่ติดกันแล้วผลจากการหารมีค่าเท่ากันเสมอ และค่าเท่ากันนี้เรียกว่า “ อัตราส่วนร่วม” จะใช้ r แทนอัตราส่วนร่วม

จะได้ว่า	$r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$	หรือ	$a_n = a_1 r^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต 1 , 3 , 9 , …

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต 64 , 16 , 4 , …

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต 3,6,12,...

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \ldots$

ตัวอย่างที่ 5 ลำดับเรขาคณิต 2,-6,18, ... มีพจน์สุดท้ายเป็น 162 แล้ว ลำดับนี้มีกี่พจน์

ตัวอย่างที่ 6 ลำดับเรขาคณิต 8 , 4 , 2 , … มีพจน์ที่ 21 เป็นเท่าใด

ตัวอย่างที่ 7 จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 8 ลำดับเรขาคณิต $64, -32, 16, \ldots -\frac{1}{8}$ มีกี่พจน์

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 9 ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์แรกเท่ากับ 3 และพจน์ที่ 3 เท่ากับ $\frac{1}{3}$ จงหาพจน์ที่ 6

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 10 ผลบวกของ 3 พจน์แรกของลำดับเราขาคณิตลำดับหนึ่งเป็น -3 และผลคูณของ 3 พจน์แรกนี้เป็น 8 จงหาลำดับนี้

วิธีทำ

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

1) $1, 2, 4, \ldots$

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

3) $-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots$

4) $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$

5) $-\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{1,000}, \ldots$

6) a, ab, ab^2, …

7) 0.13, 0.0013, 0.000013, …

8) 128, 64, 32, …

9) $3,\ 3\sqrt{3},\ 9, \ldots$

10) $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$

2. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเราขาคณิต 1, 2, 4, …

3. จงหาพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิต $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

4. จงหาพจน์ที่ 8 ของเรขาคณิต 128, 64, 32, …

5. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต $a, \frac{a}{b}, \frac{a}{b^2}$

6. ลำดับเรขาคณิต 1, 3, 9, …, 2187 มีกี่พจน์

7. ลำดับเรขาคณิต 8, 4, 2, …, $\frac{1}{64}$ มีกี่พจน์

8. ถ้าพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งเป็น $4\sqrt{2}$ และ 16 จามลำดับจงหา 4 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้

9. ผลบวกของ 3 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งเป็น 7 และผลคูณของ 3 พจน์แรกนี้เป็น 8 จงหา 3 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้

10. -489 เป็นพจน์ที่เท่าไรของลำดับเรขาคณิต 2, -6, 18, …

11. ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง 3 จำนวนที่เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหา b ในเทอมของ a และ c

12. ถ้า 3, x, 75 เป็นจำนวนจริง 3 จำนวนซึ่งเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว จงหาค่า x

13. จงหาจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง 1, 2, และ 10.8 ที่จะทำให้จำนวนทั้ง 3 เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต

14. จงหาจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง $\frac{3}{4}$ และ $\frac{64}{27}$ ซึ่งจะให้จำนวนทั้ง 3 เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต

15. ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมี 4 พจน์ ถ้าพจน์แรกและพจน์สุดท้ายเท่ากับ 10 และ 1250 จงหา 2 พจน์ตรงกลางของลำดับเรขาคณิตนี้

16. ถ้า $\frac{1}{2}$, a, b, c, 8 เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต แล้วจงหา a + b + c

<u>O-net’50</u>

ลำดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นลำดับเรขาคณิต

1. $a_n = 2^n \cdot 3^{2n}$
2. $a_n = 2^n + 4^n$
3. $a_n = 3^{n^2}$
4. $a_n = (2n)^n$

<u>O-net’50</u>

พจน์ที่ 16 ของลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{625}, \frac{1}{125\sqrt{5}}, \frac{1}{125}, \ldots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $25\sqrt{5}$
2. 125
3. $125\sqrt{5}$
4. 625

<u>O-net’52</u>

กำหนดให้ a_1 , a_2 , a_2 , . . . เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = 2$ และ $a_3 = 200$ ถ้า a_2 คือค่าในข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้แล้ว ข้อดังกล่าวคือข้อใด

1. - 20
2. - 50
3. 60
4. 100

➢ <u>อนุกรมเลขคณิต</u>

เมื่อ $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a1 + (n - 1) d$ เป็นลำดับเลขคณิต

จะได้ $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (a_1 + (n - 1)d)$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรกของอนุกรม และ d เป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิต

• ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขาคณิต

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

$\therefore\ S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n - 3) d) + (a_1 + (n - 2) d) + (a_1 + (n - 1) d)$--❶

หรือ $S_n = (a_1 + (n - 1)d) + (a_1 + (n - 2) d) + (a_1 + (n - 3) d) + (a_1 + (n - 2d) + (a_1 + d) + a_1$--❷

❶ + ❷ ได้ $2S_n = [2a_1 + (n - 1)d] + [2 a_1 + (n - 1)d] + [2a_1 + (n - 1)d] + \ldots + [2a_1 + (n - 1)d]$

$$= n[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

หรืออาจเขียนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้อีกแบบหนึ่งดังนี้

$$\because\ S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + (a_1 + (n - 1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$\because\ a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต 1 + 4 + 7 + ..

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $1 + 5 + 9 + ... + 117$

วิธีทำ

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงแสดงว่า

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n + 1)$

2) $\sum_{i=1} (2i - 1) = n^2$

3) $\sum_{i=1}^{n} (4 - 3i) = \frac{n}{2}(5 - 3n)$

4) $\sum_{i=1}^{10} (2i + 1) = 120$

5) $\sum_{i=10}^{20} (2i + 1) = 341$

2. ถ้า $1 + 2 + 3 + ... + n = 136$ จงหา n

3. ถ้า $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = 361$ จงหา n

4. จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $15 + 12 + 9 + ... + (-42)$

5. จงหาผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $1 + 5 + 9 + ...$

6. จงหาผลบวก 25 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $10 + 7 + 4 + ...$

7. ผลบวกของจำนวนเต็มทีมีค่าอยู่ระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 หารลงตัวเป็นเท่าไร

8. กำหนด $S = \{50, 51, 52, \ldots, 150\}$ ผลบวกของสมาชิกของเซต S ที่ 2 หารลงตัว แต่ 3 หารไม่ลงตัว เป็นเท่าไร

9. อนุกรมเลขคณิต $1 + 4 + 7 + \ldots$ จะต้องบวกกันที่พจน์ถึงจะได้ผลบวกเป็น 590

10. อนุกรมเลขคณิต $205 + 192 + 179 + \ldots$ จะต้องบวกกันกี่พจน์จึงจะได้ผลบวกเป็น 1630

11. อนุกรมหนึ่งมีพจน์ที่ n เป็น $3n+2$ จงหาผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมนี้

12. อนุกรมเลขคณิตหนึ่งมีพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 10 เป็น 19 และ 39 ตามลำดับ จงหาผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรมนี้

13. อนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่ง ถ้า S_{10} มีค่ามากกว่า S_9 อยู่ 37 และถ้าพจน์แรกเป็น 1 จงหา ผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรมนี้

O-net'49

$\sum_{k=1}^{50}\left(1+(-1)^k\right)k$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1300
2. 1350
3. 1400
4. 1450

O-net'51

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่ง $a_2 + a_3 + \ldots + a_9 = 100$ แล้ว $S_{10} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 120
2. 125
3. 130
4. 135

O-net'52

ค่าของ $1 + 6 + 11 + 16 + \ldots + 101$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 970
2. 1020
3. 1050
4. 1071

➢ อนุกรมเรขาคณิต

เมื่อ $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$ เป็นลำดับเรขาคณิต

จะได้ $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรกของอนุกรม และ r เป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิต

- **ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต**

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

$\therefore \quad S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1} + a_1r^{n-1}$ --------❶

❶ * r ได้ $rS_n = a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1} + a_1r^n$ --------❷

❶ - ❷ ได้ $S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$

$$(1-r)S_n = a_1(1-r^n)$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ เมื่อ } r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r^n} \; ; \; r \neq 1$$

หรืออาจเขียนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตได้อีกแบบหนึ่งคือ

$$\because \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a_1 - a_1r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a_1 - a_1r^{n-1} - r)}{1-r}$$

$$= \frac{a_1 - a_nr}{1-r}$$

$$\because \quad a_n = a_1r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1-r} \; ; \; r \neq 1$$

ตัวอย่าง ที่ 1 จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต 1 + 2 + 4 + 8 + ...

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 อนุกรมเรขาคณิต 3 + 6 + 12 + ... จะต้องบวกกันกี่พจน์จึงจะได้ผลบวกเป็น 765

วิธีทำ

แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงหาค่าของอนุกรมต่อไปนี้

1) $\sum_{i=1}^{10} 2^{-i}$

2) $\sum_{i=1}^{5} (-\frac{2}{3})i$

3) $\sum_{i=1}^{6} 5 - 2^{i-1}$

2. จงหาผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $108 + 72 + 48 + \ldots$

3. อนุกรมเรขาคณิต $3 + 6 + 12 + \ldots$ จะต้องบวกกันกี่พจน์ถึงจะได้ผลบวกเป็น 765

4. อนุกรมเรขาคณิต $48 - 96 + 192 + \ldots$ จะต้องบวกกันกี่พจน์ถึงจะได้ผลบวกเป็น 528

5. อนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่งมีพจน์แรกเป็น 3 พจน์ที่ n เป็น 96 และผลบวก n พจน์แรกเท่ากับ 189 จงหาอัตราส่วนร่วมและอนุกรมนี้มีกี่พจน์

6. อนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่งมีพจน์แรกเป็น $\frac{1}{2}$ และพจน์ที่ 4 เท่ากับ 32 จงหาผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรมนี้

7. อนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่ง มีผลบวก 4 พจน์แรกเป็น 60 และพจน์ที่ 4 มีค่าเป็นสี่เท่าของพจน์ที่ 2 จงหาผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมนี้

8. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $1.1 + 2.01 + 3.001 + 4.0001 + \ldots$

O-net'49

ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ และ $a^{20} + 2a - 3 = 0$ แล้ว $1 + a + a^2 + ... + a^{19}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. - 2
2. - 3
3. - 4
4. - 5

O-net'51

ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $1 - 2 + 4 - 8 + ... + 256$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -171
2. -85
3. 85
4. 171

O-net'52

ข้อใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 100 พจน์

1. $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + ... + 199$
2. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{(2n-1)} + ... + \frac{1}{199}$
3. $1 + 2 + 4 + ... + (2^{n-1}) + ... + 2^{199}$
4. $\frac{1}{5} + \frac{1}{125} + \frac{1}{3125} + ... + \frac{1}{5^{2n-1}} + ... + \frac{1}{5^{199}}$

****

บทที่ 2
ความน่าจะเป็น

1. กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

กฎข้อที่ 1

ถ้างานอย่างหนึ่งสามารถทำให้เสร็จสิ้นได้ใน k ขั้นตอน โดยที่ขั้นตอนที่ 1 สามารถทำได้โดยวิธีที่แตกต่างกัน n_1 วิธีในแต่ละวิธีที่ทำงานในขั้นตอนที่ 1เสร็จสิ้น สามารถทำงานในขั้นตอนที่ 2 ได้ n_2 วิธี

ในแต่ละวิธีที่ทำงานในขั้นตอนที่ 1 และ 2 เสร็จสิ้น สามารถทำงานในขั้นตอนที่ 3 ได้ n_3 วิธี

ในแต่ละวิธีที่ทำงานในขั้นตอนที่ 1, 2, 3, … และ k – 1 เสร็จสิ้น สามารถทำงานในขั้นตอนที่ k ได้ n_k วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงานนี้เสร็จใน k ขั้นตอน เท่ากับ $n_1 * n_2 * n_3 \ldots n_k$ วิธี

กฎข้อที่ 2

ถ้างานอย่างหนึ่งมีวิธีการทำงานมากกว่า 1 ทาง แต่สามารถเลือกวิธีการทำงานได้ทางใดทางหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นจำนวนวิธีที่ทำงานนั้นเสร็จสิ้นเท่ากับ ผลบวกของจำนวนวิธีที่ทำงานเสร็จสิ้น ในแต่ละทาง

ตัวอย่างที่ 1 สนามกีฬาแห่งหนึ่งมีประตูอยู่ 4 ประตู ถ้าจะเข้าประตูหนึ่งแล้วออกประตูหนึ่งซึ่งไม่ซ้ำกับประตูที่เข้ามา จะมีวิธีเข้าและออกได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 มีถนนจากกรุงเทพฯ ถึงลพบุรี 2 สาย และมีถนนจากลพบุรีถึงนครราชสีมาอยู่ 3 สาย ถ้าจะขับรถยนต์จากกรุงเทพฯ ถึงนครราชสีมา โดยขับผ่านจังหวัดลพบุรีจะใช้เส้นทางได้ทั้งหมดกี่เส้นทาง และเขียนแผนภาพแสดงการเดินทางเพื่อตรวจคำตอบด้วย

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 เมื่อโยนเหรียญห้าบาทหนึ่งอันหนึ่งครั้ง เหรียญอาจขึ้นหัวหรือก้อยก็ได้ ถ้าโยนเหรียญห้าบาท 3 เหรียญ จะได้ผลลัพธ์ต่าง ๆ กันทั้งหมดกี่วิธี อะไรบ้าง เขียนแผนภาพต้นไม้เพื่อตรวจสอบคำตอบ

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จากตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 6 ถ้านำมาจัดเป็นเลข 4 หลัก จะมีกี่จำนวนที่เป็นจำนวนคู่ (ใช้ตัวเลขไม่ซ้ำกัน)

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5 หยิบไพ่ 1 ใบ จากสำรับ (52 ใบ) จงหาจำนวนวิธีที่หยิบไพ่เป็นแต้ม 2 หรือ 3 หรือ 4 หรือ 5

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. ดำมีเสื้อและกางเกงสำหรับใส่ไปเที่ยว 3 ตัว และ 2 ตัว ถ้าการแต่งกาย 1 ชุด ประกอบด้วยเสื้อและกางเกง อยากทราบว่าดำจะแต่งกายได้ต่าง ๆ กันกี่ชุด

2. นารีมีเสื้อ 4 ตัว กระโปรง 3 ตัว และรองเท้า 2 คู่ ถ้าการแต่งกายของนารี 1 ชุด ประกอบด้วย เสื้อ กระโปรง และรองเท้า อยากทราบว่านารีจะแต่งกายไปเที่ยวได้ต่าง ๆ กันกี่ชุด

3. นก 5 ตัว จะเลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง ได้กี่วิธี

4. นก 3 ตัว จะเลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง ได้กี่วิธี

5. กำหนด S = {1, 2, 3, 4, 5} จะสร้างจำนวนเต็มบวก 5 หลัก จาตัวเลขในเซต S ได้กี่จำนวน

6. กำหนด S = {0, 1, 2, 3, …, 9} จะสร้างจำนวนเต็มบวก โดยใช้ตัวเลขจากเซต S ได้กี่จำนวน
   1. จำนวนเต็มบวก 4 หลัก
   2. จำนวนเต็มบวกคี่ 4 หลัก
   3. จำนวนเต็มบวกบวก 4 หลัก

7. จากตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6 จะสร้างจำนวนเต็มคู่บวกที่มีค่ามากกว่า 400 และน้อยกว่า 999 โดยวิธีใช้ตัวเลขที่กำหนดให้ และตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้กี่จำนวน

8. จากตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 จะนำมาสร้างจำนวนเต็มคู่บวก 4 หลัก ได้กี่จำนวน โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

9. ถ้านำตัวอักษรจากคำ "VITAMEN" มาสร้างเป็นคำใหม่ซึ่งประกอบด้วย 4 ตัวอักษรต่าง ๆ กัน จะสร้างได้กี่คำ

10. ข้อสอบฉบับหนึ่งมี 10 ข้อ เป็นข้อสอบที่ให้ตอบว่า จริง หรือเท็จ ถ้านักเรียนคนหนึ่งทำข้อสอบนี้ทุกข้อ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่เขาจะตอบข้อสอบฉบับนี้

11. เลขหมายโทรศัพท์ในกรุงเทพฯ ประกอบด้วยเลข 7 ตัว จงหาจำนวนเลขหมายโทรศัพท์ที่ขึ้นต้นตัวเลข 3 ตัวแรก 423

12. ป้ายทะเบียนรถยนต์ในกรุงเทพฯ ประกอบด้วยชื่อจังหวัด พยัญชนะ 2 ตัว และตามด้วยตัวเลข 4 ตัว เช่น

วพ 4019
กรุงเทพมหานคร

13. การจัดระบบรหัสหนังสือของห้องสมุดของโรงเรียนแห่งหนึ่งประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 2 ตัว ตัวเลขโดด 3 ตัว และตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว ตัวเลขโดด 2 ตัว เช่น AS 432 C 81 จงหาจำนวนหนังสือทั้งหมดที่จะจัดโดยใช้ระบบรหัสนี้ และถ้าอักษร 2 ตัวแรก แสดงชนิดหนังสือซึ่งจัดไว้เป็นตอน จงหาจำนวนหนังสือในแต่ละตอน

14. หอประชุมของโรงเรียนแห่งหนึ่งกำหนดหมายเลขที่นั่งโดยใช้ตัวเลขแสดงตอนที่นั่งตั้งแต่ 1 ถึง 20 อักษรแสดงแถวที่นั่งใช้ A ถึง Z และตัวอักษรซ้ำ AA ถึง ZZ และตัวเลขแสดงตำแหน่งที่นั่งตั้งแต่ 1 ถึง 30 จงหาจำนวนที่นั่งทั้งหมดในหอประชุมแห่งนี้

15. ในการโยนเหรียญบาท 1 อัน 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้คือหัวหรือก้อย
    1. ถ้าโยนเหรียญบาท 2 อันพร้อมกัน 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่ผลลัพธ์ อะไรบ้าง
    2. ถ้าโยนเหรียญบาท 3 อันพร้อมกัน 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่ผลลัพธ์ อะไรบ้าง

16. ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้คือ แต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ดังนั้นถ้าทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่ผลลัพธ์ อะไรบ้าง

2 : FACTORIAL

เรื่องนี้เป็นการเรียนรูปแบบการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เป็นลักษณะการคิดและสัญลักษณ์ที่เกิดขึ้นมาเพื่อช่วยในการกระทำทางคณิตศาสตร์ เราอ่าน "n!" ว่า เอ็นแฟกทอเรียล(n factorial) หรือแฟกทอเรียลเอ็นและอ่านสั้นๆวา " เอ็นแฟก"

บทนิยาม n factoria

ให้ n ปีนตัวเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว

n! = 1.2.3.....(n-2)(n-1)n

= n(n-1)(n-2)…...3.2.1.

ค่าของแฟกทอเรียลบางค่า

1!	= 1	= 1
2!	= 2. 1	= 2
3!	= 3.2.1	= 6
4!	= 4.3.2.1	= 24
5!	= 5.4.3.2.1	= 120
6!	= 6.5.4.3.2.1	= 720
7!	= 7.6.5.4.3.2.1	= 5,040
8!	= 8.7.6.5.4.3.2.1	= 40,320
9!	= 9.8.7.6.5.4.3.2.1	= 362,880
10!	= 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1	= 3,628,800

หมายเหตุ การหา ค.ร.น(คูณร่วมน้อย)ของ factoria

ทฤษฎีบท ค.ร.น ของ "n! และ (n-1)!และ (n-2)….." คือ n!

ตัวอย่างที่ 1. จงหาค่าของ $\frac{3!\,5!\,7!}{4!\,6!}$

ตัวอย่างที่ 2. จงหาค่าของ $\dfrac{9!\,5!\,3!}{4!\,6!}$

ตัวอย่างที่ 3. จงหาค่าของ $\dfrac{(n+1)!\,n!!}{(n-1)!\,(n-2)!}$

ตัวอย่างที่ 4. จงหาค่าของ $\dfrac{(n+3)!\,n!!}{(n+1)!\,(n-1)!}$

ตัวอย่างที่ 5. กำหนดให้ $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}=12$ จงหาค่าของ $n!$

ตัวอย่างที่ 6. กำหนดให้ $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}=720$ จงหาค่าของ $(n+1)!$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของแฟกทอเรียล

1.1. $\dfrac{4!\times 5!}{3!\times 2!}$ = ……………………………………..

1.2. $\dfrac{7!\times 8!}{6!\times 5!}$ = ……………………………………..

1.3. $\dfrac{9!\times 5!}{7!\times 3!}$ = ……………………………………..

1.4. $\dfrac{4!\times 6!}{3!\times 5!}$ = ……………………………………..

1.5. $\dfrac{5!\times 6!\times 7!}{10!\times 8!}$ = ……………………………………..

2. จงหาค่าของแฟกทอเรียล

2.1. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ = ……………………………………..

2.2. $\dfrac{(n-1)!(n+1)}{(n+1)!}$ = ……………………………………..

2.3. $\dfrac{6!(n+2)!(n-1)!}{(n!)3!4!}$ = ……………………………………..

2.4. $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}$ = ……………………………………..

2.5. $\dfrac{(n+1)!(n-3)!}{(n-1)!(n-6)!}$ = ……………………………………..

3. กำหนดให้ $\dfrac{n!!}{(n-2)!} = 6$ จงหาค่าของ $n!$

4. กำหนดให้ $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$ จงหาค่าของ $(n-1)!$

5. . กำหนดให้ $\dfrac{(n+1)!}{(n+3)!} = 56$ จงหาค่าของ $n!$

6. กำหนดให้ $\dfrac{(n-2)!}{(n-10)!10!} = \dfrac{(n-2)!}{(n-8)!8!}$ จงหาค่าของ n

3 : สัญลักษณ์เกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

หัวข้อนี้กล่าวเฉพาะเรื่องสัญลักษณ์ที่จะต้องนำไปใช้เกี่ยวกับโจทย์วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation = P) และวิธีจัดหมู่ (Combination = C) เท่านั้น ส่วนรายละเอียดเกี่ยวกับการแก้ปัญหา โจทย์จะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

บทนิยาม Permutation and Combination

กำหนด n และ r เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ โดยที่ $n \geq r$ แล้ว

1. $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
2. $C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$
3. แทน $P_{n,r} = P(n,r) = {}^{n}P_{r}$
4. แทน $C_{n,r} = C(n,r) = {}^{n}C_{r}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ

1. $P_{5,3} =$ ....
2. $P_{7,7} =$ ....
3. $P_{6,2} =$ ....

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ

1. $C_{5,3} =$ ....
2. $C_{7,7} =$ ....
3. $C_{6,2} =$ ....

ทฤษฎีบท เกี่ยวกับ Pและ C

1. $P_{n,r} = C_{n,r}r!$
2. $P_{n,0} = 1$
3. $P_{n,1} = n$
4. $P_{n,n} = n!$
5. $C_{n,0} = 1$
6. $C_{n,1} = n$
7. $C_{n,n} = 1$
8. $C_{n,p} = C_{n,q}$ เมื่อ $p + q = n$

ตัวอย่างที่ 3. กำหนด $4P_{n,3} = P_{n,4}$ แล้ว ค่าของ $C_{n,2}$ มีค่าเท่ากับค่าใด

ตัวอย่างที่ 4. ถ้า $P_{n,6} = 30P_{n,4}$ แล้ว ค่าของ $(n-7)!$ มีค่าเท่ากับค่าใด

....

4 : วิธีจัดหมู่ COMBINATION

ที่ผ่านมา เราสามารถหาจำนวนวิธีของการกระทำหนึ่งๆได้ โดยการใช้วิธีแจกแจงสมาชิก ใช้แผนภาพต้นไม้ ใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ ซึ่งนักเรียนจะเห็นได้ว่า มันยุ่งยาก ใช้เวลาค่อนข้างมาก ใช้พื้นที่ในการคำนวณมาก ซึ่งก็จัดว่าเป็นวิธีการที่ไม่สู้จะดีนัก

ฉะนั้น ในหัวข้อต่อไปนี้ เราจะศึกษาเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธี ของการกระทำอีกแบบหนึ่ง ซึ่งใช้วิธีการที่จะกล่าวดังต่อไปนี้ จะสะดวกและรวดเร็วกว่า 3 วิธีข้างต้น เพราะมีสูตรสำเร็จในการคิดคำนวณ และสูตรการคำนวณนั้น จะถูกสร้างขึ้นจากความรู้ เกี่ยวกับเรื่องแฟกทอเรียล

บทนิยาม

วิธีจัดหมู่ คือ การนำสิ่งใดสิ่งหนึ่งมาจัดเป็นกลุ่มๆ โดยไม่สนใจลำดับของสิ่งนั้น

ทฤษฎีบท

มีของแตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เลือกมาจัดหมู่คราวล่ะ r สิ่ง จะสามารถทำได้ $C_{n,r}$ หรือ ${}^{n}C_{r}$ โดยที่ $n \geq r$

หมายเหตุ
1. $C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$
2. $C_{n,p} = C_{n,q}$ เมื่อ $p + q = n$

ตัวอย่างที่ 1. มีหนังสือ 6 เล่ม เพื่อนยืม 4 เล่ม จะยืมได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 2. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 12 ลูก แตกต่างกันทั้งหมด เป็นบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 4 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก หยิบขึ้นมา 3 ลูกจากกล่อง โดยหยิบได้แดง 2 ลูก และขาว 1 ลูก

ตัวอย่างที่ 3. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 12 ลูก แตกต่างกันทั้งหมด เป็นบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 4 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก หยิบขึ้นมา 3 ลูกจากกล่อง โดยหยับได้สี่เดียวกันทั้ง 3 ลูก

ตัวอย่างที่ 4 . ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ สุ่มหยิบมา 4 ใบ โดยที่ต้องได้ K สองใบ และ A หนึ่งใบ จะทำได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 5 . ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ สุ่มหยิบมา 4 ใบ โดยที่ต้องได้ 10 หนึ่งใบ และ A หนึ่งใบ จะทำได้กี่วิธี เมื่อไพ่ทั้งสีใบต้องไม่ซ้ำชุดกัน (ไม่ซ้ำดอก)

ตัวอย่างที่ 6 . ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ สุ่มหยิบมา 4 ใบ โดยที่ต้องได้ Q หนึ่งใบ จะทำได้กี่วิธี เมื่อไพ่ทั้งสีใบต้องไม่ซ้ำชุดและชนิดกัน

ตัวอย่างที่ 7 . มีปากกา 10 ด้าม เป็นปากกาเสีย 5 ด้าม จงหาวิธีหยิบปากกา 4 ด้าม แล้วได้ปากกาเสียไม่เกิน 3 ด้าม

ตัวอย่างที่ 8 . ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ สุ่มหยิบมา 4 ใบ จำนวนวิธีทั้งหมด ที่หยิบแล้วเป็นไพ่ J อย่างน้อย 2 ใบ

ตัวอย่างที่ 9 . ในการเลือกผู้บริหารโรงเรียน 5 คน จากผู้สมัคร 9 คน โดยมีนางสาวเก๋และนายวุ่นสมัครด้วย จงหาวิธีที่นางสาวเก๋และนายวุ่นได้รับเลือกพร้อมกัน

ตัวอย่างที่ 10. สามีและภรรยา 4 คู่ ต้องการเลือกกรรมการ 3 คน จะมีวิธีเลือกกี่วิธีที่สามีภรรยาเป็นกรรมการพร้อมกันไม่ได้

การแบ่งของออกเป็นกลุ่ม

การแบ่งของนั้นเราจะมองเป็นสองลักษณะ คือ การแบ่งของออกเป็นกลุ่มๆ ละไม่เท่ากัน และการแบ่งของออกเป็นกลุ่มๆ ละ เท่าๆกัน

สูตร การแบ่งของ n สิ่ง ออกเป็น k กลุ่ม กลุ่มละ $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_k$ จะแบ่งได้ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$

ตัวอย่างที่ 1 มีหนังสือแตกต่างกัน 10 เล่ม แบ่งออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 เล่ม 3 เล่ม 2 เล่ม และ 1 เล่ม จะแบ่งได้กี่วิธี

....

สูตร การแบ่งของ n สิ่ง ออกเป็น k กลุ่ม กลุ่มละ r สิ่ง จะแบ่งได้ $\frac{n!}{(r!r!r!...r!)k!} = \frac{n!}{(r!)^k k!}$

ตัวอย่างที่ 2 มีหนังสือแตกต่างกัน 10 เล่ม แบ่งออกเป็นกลุ่มๆ ละ 2 เล่ม จะแบ่งได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 3 มีคน 18 คน ต้องการแบ่งกลุ่มทำงาน กลุ่มละ 3 คน สองกลุ่ม กลุ่มละ 2 คน หกกลุ่มจะแบ่งได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 4 มีของอยู่ 5 สิ่ง นำมาแบ่งเป็นสามกลุ่มแบ่งได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 5 แบ่งหนังสือแตกต่างกัน 6 เล่ม เป็น 3 เล่ม 2 เล่ม และ 1 เล่ม ทำได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 6 แบ่งหนังสือแตกต่างกัน 6 เล่ม ให้เด็ก 3 คนโดยคนที่หนึ่งได้ 3 เล่ม คนที่สอง 2 เล่ม และคนที่ สามได้ 1 เล่ม ทำได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 7 มีจดหมายอยู่ 4 ฉบับ ต้องการส่งโดยมีตู้รับจดหมาย 3 ตู้ สามารถส่งได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 8 เรือนรับรองมีห้องพัก 3 ห้อง โดยมีห้องหนึ่งพักได้ 2 คน อีกสองห้องพักห้องละ 3 คน ถ้ามีชาย 5 คน หญิง 3 คน จะเข้าพักได้กี่วิธีถ้าหญิงต้องอยู่ห้องเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 9 บ้านพักมีห้องพัก 5 ห้อง โดยเป็นเตียงคู่ 3 ห้อง เป็นเตียงเดี่ยว 2 ห้อง มีคน 5 คนจะเข้าพักได้กี่วิธี

....

5 : การเรียงสับเปลี่ยน Permutation

การเรียงสับเปลี่ยนเป็นการกระทำอย่างหนึ่งที่สนใจตำแหน่งของการกระทำโดยใช้ความรู้เรื่องแฟกทอเรียลมาช่วยในการคำนวณ

บทนิยาม

การเรียงสับเปลี่ยน คือ การนำสิ่งใดสิ่งหนึ่งมาจัดเรียง โดยให้ความสนใจลำดับของสิ่งนั้นเป็นสำคัญ

ทฤษฎีบท

มีของแตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เลือกมาเรียงสับเปลี่ยนคราวล่ะ r สิ่ง จะสามารถทำได้ $P_{n,r}$ หรือ ${}^{n}P_{r}$ โดยที่ $n \geq r$

หมายเหตุ 1. $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

2. $P_{n,n} = n!$

3. $P_{n,r} = C_{n,r}r!$

....

การจัดของติดกัน

ตัวอย่างที่ 1. จงหาจำนวนวิธีที่ชาย 4 คน และหญิง 3 คน ยืนเรียงกันเป็นแถวตรงให้หญิงติดกัน

ตัวอย่างที่ 2. ครอบครัวหนึ่งมี พ่อ แม่ ลูกสองคน และตากับยาย จัดนั่งถ่ายรูปโดย ลูกคนเล็กและพ่อ แม่ ต้องนั่งติดกันเท่าได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 3. จงหาจำนวนวิธีการจัดสามีและภรรยา พร้อมเพื่อนสามีอีก คนนั่งเรียงเป็นแถวตรง โดย สามี และภรรยานั่งติดกัน

การจัดของไม่ติดกัน

ตัวอย่างที่ 4. จงหาจำนวนวิธีที่ชาย 4 คน และหญิง 3 คน ยืนเรียงกันเป็นแถวตรงให้หญิงไม่ติดกัน

ตัวอย่างที่ 5. ครอบครัวหนึ่งมี พ่อ แม่ ลูกสามคน และตากับยาย จัดนั่งถ่ายรูปโดย ลูกคนเล็กและพ่อ แม่ต้องนั่งไม่ติดกันเท่าได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 6. จงหาจำนวนวิธีการจัดสามีและภรรยา พร้อมเพื่อนสามีอีก คนนั่งเรียงเป็นแถวตรง โดย สามีและภรรยานั่งไม่ติดกัน

ตัวอย่างที่ 7. นายดนัย นางสาวอภิญญา และนางดุสิตา รวมเพื่อนอีก 3 คน นั่งเรียงแถวตรง โดยนายดนัยและนางสาวอภิญญาต้องนั่งติดกัน แต่ทั้งคู่ต้องนั่งแยกจากนางดุสิตา จะนั่งได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 8. นายดำ นายแดง นายเขียว และนางขาวรวมเพื่อนอีก 4 คน นั่งเรียงแถวตรง โดยนายดำนายแดงและนายเขียวต้องนั่งติดกัน แต่ทั้งคู่ต้องนั่งแยกจากนางขาวจะนั่งได้กี่วิธี

....

6 : การเรียงสับเปลี่ยนเป็นแนววงกลม

การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมนั้นเป็นการเรียงในรูปแบบปิด คือ หัวแถวและหางแถวมาบรรจบกัน ทำให้ การเรียนตามแนววงกลมนี้ถ้าพิจารณาแล้วการหมุนจะทำให้รูปแบบการเรียงเหมือนเดิมแต่เปลี่ยนตำแหน่งไป ดังนั้นการเรียงแบบวงกลมจึงต้องมาการกำหนดตำแหน่งก่อน

สูตรการจัด

นำของ n สิ่งมาจัดเรียงเป็นวงกลมทั้งหมด จะทำได้ $(n-1)!$ วิธี

....

ตัวอย่างที่ 1. มีผู้ชาย 12 คน จัดนั่งเป็นวงกลมได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 2. จัดนักเรียนชาย 5 คน หญิง 3 คนนั่งเรียงเป็นวงกลมได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 3. นายแดงและนายดำ พร้อมเพื่อนอีก 5 คน นั่งเรียงรอบโต๊ะกลม โดยที่นายแดงนั่งไม่ติดดำ ทำได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 4. นายดนัย นางสาวอภิญญา และนางดุสิตา รวมเพื่อนอีก 3 คน นั่งรับประทานอาหาร โดยนายดนัยและนางสาวอภิญญาต้องนั่งติดกัน แต่ทั้งคู่ต้องนั่งแยกจากนางดุสิตา จะนั่งได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 5. บ่อปลาแห่งหนึ่งเป็นวงกลม อนุญาตให้เข้าตกปลาได้ทีละ 4 คน โดยให้นั่งตกปลารอบบ่อ ถ้าครอบครัวหนึ่งมากัน 6 คน จะจัดให้คนในครอบครัวนี้ นั่งตกปลารอบบ่อได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 6. ต้องการจัดคน 7 คน ให้นั่งรอบโต๊ะหกเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งจัดเก้าอี้ไว้รอบโต๊ะ 6 ตัว โดยเก้าอี้แต่ละตัววางห่างกันเป็นระยะเท่ากัน และเก้าอี้หนึ่งตัวนั่งได้ 1 คน จะมีจำนวนวิธีจัดดังกล่าวได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 7. ร้อยพวงมาลัยเป็นรูปวงกลมด้วยดอกไม้ 5 สี สลับกันจนรอบจะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

..

7. ความน่าจะเป็น

การทดลองสุ่ม

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองใด ๆ ซึ่งไม่สามารถพยากรณ์ผลลัพธ์ได้ล่วงหน้า เนื่องจากผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมีได้หลายอย่าง ตัวอย่างเช่น การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ถือว่าเป็นการทดลองสุ่ม เพราะสามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์ที่จำเกิดขึ้น คือ แต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 แต่บอกไม่ได้ว่า เมื่อทอดลูกเต๋าในแต่ละครั้งจะได้แต้มใดที่แน่นอนลงไป

ผลลัพธ์

ผลลัพธ์ คือ ผลที่ได้จากการทดลองสุ่มที่เสร็จสิ้นลง ซึ่งจะปรากฏเพียงทางหนึ่งทางเดียวเท่านั้น ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นหัวหรือก้อยอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

เซตผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

เซตผลลัพธ์ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นได้จากการทดลองสุ่ม เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “แซมเปิลสเปซ” และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S และเรียกสมาชิกของแซมเปิลพ้อย” (Sample point)

ตัวอย่างเช่น การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือจำนวนแต้มที่จะได้ จะได้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ แต่ถ้าสนใจเพียงว่าแต้มที่ได้จะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ของลูกเต๋า ผลที่ได้จากการทดลองอาจเป็นจำนวนคู่หรือคี่อย่างใดอย่างหนึ่ง และจะได้ S = {จำนวนคู่, จำวนคี่} ดังนั้น การทดลองสุ่มอันหนึ่งอาจมีแซมเปิลสเปซหลายแบบแล้วแต่ความสนใจของเรา

เหตุการณ์

เหตุการณ์ คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซซึ่งเขียนแทนด้วย E จะเห็นว่าแซมเปิลสเปซนับเป็นเหตุการณ์ได้ และ $\varnothing$ ก็นับเป็นเหตุการณ์ได้เช่นเดียวกัน

ตัวอย่างเช่น ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ จำนวนแต้มที่ได้

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว จะได้ $E_1 = \{3, 6\}$

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มไม่ต่ำกว่า 4 จะได้ $E_2 = \{4, 5, 6\}$

ยูเนียนของเหตุการณ์

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์แล้ว ยูเนียนของเหตุการณ์ E_1 และ E_1 ซึ่งเขียนแทนด้วย E_1 U E_2 คือ เหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ E_1 หรือทั้งสองเหตุการณ์

ตัวอย่างเช่น ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้ม ซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว

$\therefore$ $E_1 = \{3,6\}$

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคี่

$\therefore$ $E_1 = \{1, 3, 5\}$

ดังนั้น $E_1 \bigcup E_2 = \{1, 3, 5,6\}$

อินเตอร์เซ็กชันของเหตุการณ์

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์แล้ว อินเตอร์เซ็กชั่นของเหตุการณ์ E_1 และ E_2 ซึ่งเขียนแทนด้วย $E_1 \bigcap E_2$ คือเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งในเหตุการณ์ E_1 และเหตุการณ์ E_2

ตัวอย่างเช่น ในการโยนเหรียญบาท 3 เหรียญ 1 ครั้ง

$S = \{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่โยนได้หัว 2 ครั้ง

$\therefore$ $E_1 = \{HHT,HTH,TTH\}$

ถ้า E_2 = เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวในการโยนครั้งแรก

$\therefore$ $E_1 = \{HHH,HHT,HTH,HTT\}$

ดังนั้น $E_1 \bigcap E_2 = \{HHT,HTH\}$

คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์

ถ้า E เป็นเหตุการณ์ซึ่งอยู่ในแซมเปิลสเปซ S แล้ว คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E ซึ่งแทนด้วย É คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในแซมเปิลสเปส S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ E

ตัวอย่างเช่น ในการโยนเหรียญบาท 2 เหรียญ 1 ครั้ง

S = {HH, HT, TH, TT}

E เป็นเหตุการณ์ที่ขึ้นหัวทั้งสองเหรียญ

E = {HH}

$\therefore$ E = {HT, TH, TT}

เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์และ $E_1 \cap E_2$ = แล้วจะเรียกเหตุการณ์ E_1 และ E_2 ว่า “เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน”

ตัวอย่างเช่น ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ถ้า E_1 = เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคี่

E_1 = เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่

$\therefore$ $E_1 \cap E_2$ =

ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น คือ อัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(E)

นั่นคือ ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่สนใจ $\therefore$ n(E) แทนจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E

S เป็นแซมเปิลสเปซ $\therefore$ n(S) แทนจำนวนสมาชิกของ E

ดังนั้น $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

ถ้า P(E) = 0 หมายความว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย

ถ้า P(E) = 1 หมายความว่า เหตุการณ์ E เกิดขึ้นแน่นอน

ถ้า P(E) = $\frac{1}{2}$ หมายความว่า เหตุการณ์มีโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ E ครึ่งต่อครึ่ง

สมบัติบางประการของความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P() = 0$
3. $P(S) = 1$
4. ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S แล้ว
   $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$
5. ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันแล้ว
   $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
6. E_1, E_2 และ E_3 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S แล้ว
   $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2)$
   $- P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$
7. ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S แล้ว $P(E') = 1 - P(E)$
8. ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S และ $E_1 \subset E_2$ แล้ว
   $P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1)$
9. ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์เป็นเหตุการณ์อิสระต่อกัน แล้ว
   $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าครอบครัวหนึ่งต้องการมีบุตรเพียง 2 คน ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ที่ครอบครัวนั้นจะมีบุตรชายอย่างน้อย 1 คน เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 2 กล่องใบหนึ่งมีบัตรขนาดเท่ากัน 20 ใบ บรรจุอยู่ ซึ่งบัตรแต่ละใบมีหมายเลขกำกับบัตรละหนึ่งหมายเลข คือ 1, 2, 3, ..., 20 จงหาความน่าจะเป็นที่จับบัตรอย่างสุ่ม 1 ใบ จากกล่องใบนั้นแล้วได้

1. หมายเลขไม่เกิน 5 2. หมายเลขที่หารด้วย 3 ลงตัว

ตัวอย่างที่ 3 ในลิ้นชักมีถุงเท้าอยู่ 4 คู่ เป็นถุงเท้าสีดำ 2 คู่ และสีขาว 2 คู่ ถ้าทำการทดลองสุ่มโดยหยิบถุงเท้ามา 2 คู่ ให้หาความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าทั้งสองคู่สีเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 4 ต้องการนำอักษรในคำ SPERCTRUM มาเรียงเป็นคำที่ประกอบด้วยอักษร 4 ตัว (โดยไม่คำนึงถึงความหมาย) ในแต่ละคำไม่ให้มีอักษรซ้ำกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะจัดให้ตัวอักษรตัวท้ายสุดเป็นสระเสมอ

ตัวอย่างที่ 5 ในการจัดเด็กผู้ชาย 5 คน เด็กผู้หญิง 5 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดาษ จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กชาย ก ยืนหัวแถวเสมอ และเด็กหญิงกับเด็กชายจะต้องยืนสลับกัน

ตัวอย่างที่ 6 นำอักษรจากคำว่า SUNLIGHT มาจัดเรียงให้เป็นคำที่ประกอบด้วยอักษร 4 ตัว (คำเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีความหมาย) จงหาความน่าจะเป็น ที่จะจัดให้อักษรตัวสุดท้ายเป็นสระเสมอ

ตัวอย่างที่ 7 จัดชาย 5 คนยืนเรียงเป็นแถวแนวตรง จงหาความน่าจะเป็นที่ชาย 2 คนที่กำหนดต้องยืนติดกันเสมอ

ตัวอย่างที่ 8 ชาย 3 คนและหญิง 4 คน เข้าคิวในแถวเดียวกันเพื่อซื้อตั๋วรถไฟขบวนหนึ่ง ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 4 คน จะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถว จะเท่ากับค่าใด

ตัวอย่างที่ 9 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 10 ลูก เป็นสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก สีดำ 2 ลูก หยิบลูกบอล 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลแดง 2 ลูก ดำ 1 ลูก

ตัวอย่างที่ 10 มีเก้าอี้ 8 ตัว จัดให้ชาย 3 คน หญิง 2 คน นั่งเรียงเป็นแนวเส้นตรง ความน่าจะเป็นที่ชาย 3 คน ต้องนั่งติดกันเสมอ

....

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

กำหนด A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข คือ ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B จะเกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(B I A)

ตัวอย่างเช่น ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง โดยกำหนดว่าการทอดลูกเต๋าครั้งนี้จะต้องขึ้นแต้มเป็นเลขคี่ จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 5

จะเห็นว่า แซมเปิลสเปซจะลดลงเหลือ 3 ตัว คือ { 1, 3, 5 } ซึ่งเป็นสับเซตของ { 1, 2, 3, 4, 5, 6, } เรียกแซมเปิลสเปซ { 1, 3, 5, } ว่า “reduce sample space”

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 5 เมื่อทราบแน่ ๆ ว่าลูกเต๋าขึ้นแต้มคี่ = $\frac{1}{3}$

ดังนั้น ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ทอดลูกเต๋าขึ้นแต้มคี่

B เป็นเหตุการณ์ที่ทอดลูกเต๋าขึ้นแต้ม 5

$\therefore$ A = {1, 3, 5} $\qquad\therefore$ P(A) = $\frac{3}{6}$

B = {5} $\qquad\therefore$ P(B I A) = $\frac{1}{3}$

A $\bigcap$ B = {5} $\qquad\therefore$ P(A $\bigcap$ B) = $\frac{1}{6}$

$$\because\ P(B\ I\ A) = \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A ให้ = $\frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$

$$P(B\ I\ A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$$

ทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดเหตุการณ์ B ให้ = $\frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$

$$P(A\ I\ B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

ตัวอย่างที่ 6 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้มของลูกเต๋าลูกหนึ่งมากกว่าลูกที่สอง เมื่อกำหนดให้ผลรวมของแต้มเท่ากับ 10

ตัวอย่างที่ 7 จากรายงานผลการเรียนของนักเรียนชั้น ม.4 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าสอบไม่ผ่านวิชาฟิกส์ 30% สอบไม่ผ่านวิชาคณิตศาสตร์ 20% และสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้ 15% ถ้านักเรียนคนหนึ่งสอบวิชาฟิสิกส์ไม่ผ่าน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนั้นจะสอบวิชาคณิตศาสตร์ไม่ผ่าน

ตัวอย่างที่ 8 หยิบไพ่ 2 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง 52 ใบ โดยหยิบมาทีละใบ เมื่อหยิบไพ่ใบแรกแล้วไม่ได้คืนสำรับ เมื่อจะหยิบใบที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบไพ่ทั้ง 2 ครั้งแล้วได้โพแดงทั้ง 2 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 9 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 2, 3 หรือ 5 ในการทอดลูกเต๋าครั้งแรก และขึ้นแต้ม 1, 3, 5 หรือ 6 ในการทอดลูกเต๋าครั้งที่สอง

ตัวอย่างที่ 10 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเดียวกัน 5 ลูก เป็นลูกบอลสีขาว 3 ลูก และสีดำ 2 ลูก หยิบลูกบอลจากกล่องนี้อย่างสุ่มมา 2 ลูก โดยเมื่อหยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนกล่องตามเดิม จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบลูกบิลได้สีดำทั้งสองลูก

....

เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent events)

เหตุการณ์สองเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นอิสระต่อกัน หมายถึง ถ้าเกิดเหตุการณ์หนึ่งขึ้นจะไม่มีผลกระทบทำให้อีกเหตุการณ์หนึ่งเกิดขึ้นเปลี่ยนแปลงไป ตัวอย่างเช่น การโยนลูกเต๋า 1 ลูก 3 ครั้ง ไม่ว่าการโยนลูกเต๋าครั้งที่หนึ่งจะขึ้นหน้าอะไรก็ตาม การโยนลุกเต๋าครั้งที่สองและครั้งที่สามมีโอกาสจะเกิดได้ทุกหน้าเหมือนกัน หรือการหยิบลูกบอล 2 ลูก 2 ครั้ง จากกล่องใบหนึ่งซึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก และสีขาว 5 ลูก โดยการหยิบลูกบอล 2 ลูก ครั้งแรกแล้วใส่คืนในกล่องตามเดิม (with replacement) ก่อนที่จะหยิบลูกบอลครั้งที่สอง ดังนั้นการหยิบลูกบอลครั้งแรกจะไมมีผลกระบกระเทือนต่อการหยิบลูกบอลครั้งที่สอง

เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกันเมื่อ $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$

ตัวอย่างที่ 11 ทอดลูกเต๋าสีดำ 1 ลูก และสีขาว 1 ลูก ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าสีดำขึ้นแต้ม 3 และ 3 และ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลบวกของแต้มทั้งสองของลูกเต๋าเป็นเลขคี่ จงแสดงให้เห็นว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 12 กล่องใบหนึ่งมีลูกหินสีแดง 3 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก หยิบลูกหินจากกล่องใบนี้ 2 ครั้ง โดยหยิบมาครั้งละ 2 ลูก ซึ่งหยิบลูกหินแล้วให้คืนใส่กล่องตามเดิมทุกครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกหินครั้งแรกได้สีแดงหมด และครั้งที่สองได้สีน้ำเงินหมด

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 13 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ครั้งหนึ่งขึ้นแต้มคู่ ครั้งที่สองขึ้นแต้ม 5 และครั้งที่สามขึ้นแต้ม 1

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 14 โยนเหรียญบาท 1 อัน 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. ขึ้นก้อยทั้ง 3 ครั้ง

ข. ขึ้นก้อยในครั้งที่ 1 และ 2 ส่วนครั้งที่ 3 ขึ้นหัว

ค. ขึ้นก้อย 2 ครั้ง เท่านั้น

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 15 ความน่าจะเป็นที่นาย ก, นาย ข และนาย ค จะยิงปืนถูกเป้าในแต่ละนัด เป็น 0.7, 0.9 และ 0.8 ตามลำดับ ในการยิงปืนครั้งหนึ่งคนละหนึ่งนัด จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

ก. มีผู้ยิงปืนถูกเป้า 2 คน

ข. มีผู้ยิงปืนถูกเป้าอย่างน้อย 1 คน

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. มีสลากขนาดเดียวกัน 5 ใบ แต่ละใบเขียนหมายเลขกำกับใบละหนึ่งหมายเลข คือ 1, 2, 3, 4, 5 บรรจุอยู่ในกล่องทึบ สุ่มหยิบมา 2 ใบพร้อมกันจงหาความน่าจะเป็นที่สลาก 2 ใบ นั้นมีหมายเลขเรียงติดต่อกัน

2. บัตรสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาดเท่ากัน 20 ใบ บรรจุอยู่ในกล่องทึบ แต่ละบัตรมีหมายเลขกำกับ บัตรละหนึ่งหมายเลข คือ 1, 2, 3, …, 20 สุ่มหยิบมา 1 บัตร จงหาความน่าจะเป็นที่บัตรใบนั้นมีหมายเลขที่ 2 หารไม่ลงตัว

3. จะจัดชาย 6 คน นั่งถ่ายรูปในแนวตรง ในจำนวนนี้มีนาย ก อยู่ด้วย จงหาความน่าจะเป็นที่จะจัดให้ ก นั่งอยู่หัวแถวเสมอ

4. มีลูกแก้วสีแดง 5 ลูก และสีขาว 4 ลูก ขนาดเดียวกันอยู่ในกล่องทึบ สุ่มหยิบลูกแก้ว 3 ลูก พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบลูกแก้วได้สีแดง 2 ลูก และสีขาว 1 ลูก

5. จะจัดหญิง 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลมในจำนวนนี้มีนารีแลโสภาอยู่ด้วย จงหาความน่าจะเป็นที่จะจัดให้นารีและโสภานั่งติดกันเสมอ

6. จะสร้างคำประกอบด้วยตัวอักษร 4 ตัว จากคำว่า ANEKOS โดยไม่คำนึงถึงความหมาย จงหาความน่าจะเป็นที่คำนั้นขึ้นต้นและลงท้ายด้วยสระเสมอ

7. จากตัวเลขโดด 5 ตัว 1, 2, 3, 4, 5 จะสร้างจำนวนเต็มบวก 3 หลัก จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนที่สร้างขึ้นมามีค่ามากกว่า 500

8. จากตัวอักษร 4 ตัว คือ N, N, O, O จงหาความน่าจะเป็นที่จะสร้างคำว่า NOON จากตัวอักษรทั้ง 4

9. จะจัดชาย 4 คน และหญิง 3 คน เข้าแถวตรง จงหาความน่าจะเป็นที่จัดแล้วหญิงทั้ง 3 คน ยืนแยกกัน

10. มีรองเท้า 4 คู่ สีต่าง ๆ กันวางรวมกันอยู่ สุ่มหยิบมา 4 ข้าง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้รองเท้าต่างคู่กัน

11. จัดคน 5 คน คือ หน่อย นิด ผา มด และป้อม เข้าพักในบ้านหลังหนึ่งซึ่งมี 2 ห้อง ห้องหนึ่งจุ 3 คน อีกห้องหนึ่งจุ 2 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะต้องจัดให้หน่อยและนิดพักห้องเดียวกัน

12. บัตรสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเดียวกัน แต่ละบัตรมีหมายเลขกำกับบัตรละหนึ่งหมายเลข ตั้งแต่ถึง 50 บรรจุอยู่ในกล่องทึบ สุ่มหยิบมา 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้บัตรใบนั้น ซึ่งหารด้วย 2 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

13. จัดคน 8 คน นั่งเป็นวงกลม ในจำนวนนี้มีหน่อย นิด และมดรวมอยู่ด้วย จงหาความน่าจะเป็นที่จะจัดให้หน่อยนั่งติดกับนิดและมดเสมอ

14. โยนเหรียญบาท 2 เหรียญ 1 ครั้งพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้ง 2 เหรียญ จะขึ้นหัว 1 เหรียญและก้อย 1 เหรียญ

15. โยนเหรียญบาท 3 เหรียญ พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้ง 3 จะขึ้นหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ

16. ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้มที่ 2 หารไม่ลงตัว

17. ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าทั้งสอง
    1. ขึ้นแต้มเหมือนกัน
    2. ผลบวกของแต้มของลูกเต๋าทั้งสองลูกเป็น 10
    3. ลูกเต๋าทั้งสองขึ้นแต้มต่างกัน

18. คน 10 คน ต่างเขียนชื่อลงในสลากขนาดเดียวกันแล้วม้วนใส่ในกล่อง แล้วทุกคนต่างสุ่มหยิบสลากขึ้นมาคนละใบ จงหาความน่าจะเป็นที่มีอยู่ 2 คน ที่จักสลากได้สลากที่เป็นชื่อตัวเอง

19. มีชาย 4 คน และหญิง 4 คน เลือกชายมา 2 คน และหญิงมา 2 คน จากคนกลุ่มหนึ่งนี้เพื่อมาเข้าแถว จงหาความน่าจะเป็นที่จะจัดให้ชาย 2 คน และหญิง 2 คน ยืนติดกันเสมอ

20. กำหนด $A =$; $a, b \in \{1, 2, 3\}$ จงหาความน่าจะเป็นที่ A จะเป็นเมตริกที่ไม่ใช่เมตริกซ์เอกฐาน

21. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จงหาความน่าจะเป็นที่ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ จาก A ไป B

22. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{4, 5\}$ ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงหาความน่าจะเป็นที่ r จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

23. กำหนด E_1 และ E_1 เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ S ถ้า $P(E_1) = \frac{5}{8}$, $P(E_2) = \frac{3}{8}$ และ $P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{8}$ จงหา $P(E_1 \cup E_2)'$)

23. กำหนด E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ S ถ้า $P(E_1) = P(E_2) =$ และ $P(E_1\ E_2) =$ จงหา $P((E_1\ E_2))$

24. กำหนด E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ S ถ้า $P(E'_1) = 0.4$, $P(E'2) = 0.6$ และ $P(E'_1 \cap E'_2) = 0.8$ จงหา $P(E'_1 \cup E'_2)'$)

25. ความน่าจะเป็นที่อาทิตยาจะสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ และวิชาฟิสิกส์เท่ากับ $\frac{3}{8}$ และ $\frac{2}{5}$ ตามลำดับ และความน่าจะเป็นที่เขาจะผ่านทั้งสองวิชาเท่ากับ $\frac{1}{4}$ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อย 1 วิชา

26. หมู่บ้านหนึ่งมี 400 ครอบครัว เป็นครอบครัวที่เลี้ยงไก่ 230 ครอบครัว เลี้ยงเป็ด 200 ครอบครัว และเลี้ยงทั้งไก่และเป็ด 50 ครอบครัว สุ่มมา 1 ครอบครัว จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนั้นไม่เลี้ยงทั้งไก่และเป็ด

27. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนทั้งหมด 1,000 คน ทางโรงเรียนได้จัดให้นักเรียนเยนพิเศษตอนเย็น 3 วิชา คือ วิชาคณิตศาสตร์ วิชาฟิสิกส์ และวิชาภาษาอังกฤษ ปรากฏว่ามีนักเรียน

    350 คน สมัครเรียนวิชาคณิตศาสตร์

    420 คน สมัครวิชาฟิสิกส์

    480 คน สมัครเรียนทั้งวิชาภาษาอังกฤษ

    150 คน สมัครเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และฟิสิกส์

    200 คน สมัครเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และภาษาอังกฤษ

    250 คน สมัครเรียนทั้งวิชาฟิสิกส์ และภาษาอังกฤษ

    และ 50 คน สมัครเรียนทั้ง 3 วิชา สุ่มใบสมัครมา 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนั้นสมัครเรียนอย่างน้อย 1 วิชา

28. กำหนด E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ในแซทเปิลสเปส S ถ้า $P(E_1 - E_2) = 0.4$ $P(E_1) = 0.8$, $P(E_2) = 0.5$ จงหา $P(E'_1 \cap E'_2)$

29. ความน่าจะเป็นของคนคนหนึ่งในหมู่บ้านแห่งหนึ่งที่จะเลี้ยงเป็ดและเลี้ยงไก่เป็น 0.6 และ 0.4 ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่คน ๆ นั้นจะเลี้ยงทั้งเป็ดและไก่เป็น 0.2 ถ้าคนในหมู่บ้านนั้นมีทั้งหมด 200 คน จงหาจำนวนคนในหมู่บ้านนี้ที่ไม่เลี้ยงทั้งเป็ดและไก่

30. ความน่าจะเป็นที่ ก จะสอบเข้ามหาวิทยาลัยได้เท่ากับ p และความน่าจะเป็นที่ ข จะสอบเข้ามหาวิทยาลัยได้เท่ากับ q จงหาความน่าจะเป็นที่คนใดคนหนึ่งจะสอบเข้ามหาวิทยาลัยได้

31. ก ซื้อสลากกินแบ่งของรัฐบาล 1ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะถูกรางวัลเลขท้าย 3 ตัว หรือ 2 ตัว

32. ให้ p,q และ r แทนประพจน์ จงหาความน่าจะเป็นที่ประพจน์ (p q) r มีค่าความจริงเป็นเท็จ

33. กำหนดตัวเลข 1, 2, 3, 4 และ 5 ถ้านำตัวเลขเหล่านี้มาสร้างเลขบวก 3 หลัก โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขตันนั้นเป็นเลขที่มีค่ามากกว่า 300 เป็นเท่าไร

34. จากตัวเลข 1, 2, 3, 4 และ 5 จะสร้างจำนวนเต็มคู่บวก 3 หลัก โดยใช้ตัวเลขเหล่านี้โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนคู่บวกนั้นมีค่ามากกว่า 300

35. สุธิดาเกิดในเดือนกันยายน วันที่ที่เขาเกิดเป็นเลขคู่ แต่ 3 การไม่ลงตัว เขาให้เพื่อนคนหนึ่งทายวันเกิดของเขา ความน่าจะเป็นที่เพื่อนคนนั้นจาทายวันที่ที่เขาเกิดได้ถูกต้องเป็นเท่าไร

36. ถ้าความน่าจะเป็นที่ฝนตกชุกในเดือนตุลาคมในกรุงเทพฯ เท่ากับ 0.95 ความน่าจะเป็นที่จะเกิดน้ำท่วม ในเดือนตุลาคมในกรุงเทพฯ เท่ากับ 0.75 และความน่าจะเป็นที่ฝนจะแล้ง และน้ำท่วมในเดือนเดือนตุลาคมในกรุงเทพฯ เท่กับ 0.2 จงหาความน่าจะเป็นที่ฝนแล้ง หรือน้ำจะท่วมในเดือนตุลาคมในกรุงเทพฯ

37. มีสลากสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากัน 15 ใบ แต่ละใบมีหมายเลขกำกับอยู่บัตรละหนึ่งหมายเลขคือเลข 1 ถึง 15 และในจำนวนสลาก 15 ใบนี้มีอยู่ 2 ใบที่ใครจับได้แล้วได้รับรางวัล ปรากฏว่านายดำรงขอจับสลาก 5 ใบ พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ดำรงจะได้รับรางวัลอย่างน้อย 1 รางวัล

48. ก, ข และ ค เล่นเกมแข่งขันชนิดหนึ่ง ซึ่งพบว่าแต่ละคนมีโอกาสแพ้ชนะเท่า ๆ กัน ถ้าเขาทั้งสามคนเล่นเกมทั้งหมด 4 เกม จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ก ชนะทุกครั้ง
2. ก จะชนะเกมสุดท้าย
3. ก จะชนะ 2 เกมเท่านั้น

49. ในการหยิบไพ่ 1 ใบ จากสำรับ 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้โพแดงหรือ

50. ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม 1 อย่างน้อย 1 ครั้ง

****